"به نام خدا"

پاسخ سوالات چهارگزینه ای حسابان:

۱- گزینه‌ی «۲»

راه حل اول: رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1 = (x+1)Q(x) + 4$$

اگر در بالا، به جای x، قرار دهیم ۱−، a به‌دست می‌آید:

$$1 + a + 1 - 2a + 1 = 0 + 4 \Rightarrow a = -1$$

راه حل دوم: باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x+1$، برابر ۴ است، لذا:

$$f(-1) = 4 \to 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \to -a = 1 \to a = -1$$

۲- گزینه‌ی «۲»

ابتدا رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1 = (x^2 - 4)Q(x) + 0$$

مقدارعبارت به ازای $x = 2$ و $x = -2$ صفر خواهد بود،

$$x = 2 \to 16 + 16a + 4b + 1 = 0 \to 4a + b = \frac{-17}{4}$$

$$x = -2 \to 16 + 16a - 4b + 1 = 0 \to 4a - b = \frac{-17}{4}$$

از حل دستگاه بالا $b = 0$ و $a = \frac{-17}{16}$ بنابراین $a + b = \frac{-17}{16}$.

۳- گزینه‌ی «۱»

$$f(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$$

چون $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، پس $f(-2) = 0$، خواهیم داشت:

$$f(-2) = (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} - 32 + 40 + k$$
$$= (-2)^{2n+1} - (-2)^{2n+1} - 32 + 40 + k = 8 + k$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 8 + k = 0 \Rightarrow k = -8$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 1$، یک چندجمله‌ای به شکل $ax + b$، خواهد بود، رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$

حال مقدارتساوی را به ازای $x = 1$ و $x = -1$، می‌یابیم.

$$f(1) = -9 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = -9 \,, (1)$$

$$f(-1) = -3 = 0 - a + b \Rightarrow b - a = -3, (2)$$

از حل دستگاه (۱) و(۲)، $b = -6$ و $a = -3$، بنابراین $R(x) = -3x - 6$.

۴- گزینه‌ی «۲»

چون:

$$(1+\sqrt{2})^{2}=1+2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$$

پس با توجه به تساوی داده شده خواهیم داشت:

$$(1+\sqrt{2})^{2n}=99+b\sqrt{2}\Rightarrow((1+\sqrt{2})^{2})^{n}=99+b\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow(3+2\sqrt{2})^{n}=99+b\sqrt{2}\quad(*)$$

از تساوی (*) می‌توان نتیجه گرفت که

$$(3-2\sqrt{2})^{n}=99-b\sqrt{2}\ (**)$$

زیرا در بسط‌های (*) و (**) جملات فرد (جملاتی که عدد $-2\sqrt{2}$ توان زوج دارد) کاملاً یکسانند و جملات زوج (جملاتی که عدد $-2\sqrt{2}$ توان فرد دارد) قرینه‌ی یکدیگرند پس نتیجه‌گیری درست است. دقت کنید در حالتی که $(-2\sqrt{2})$ توان فرد دارد رادیکال حذف نمی‌شود. حال برای محاسبه‌ی b کافیست طرفین عبارت‌های (*) و (**) را در هم ضرب کنیم: (در ضرب عبارت‌ها از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.)

$$\begin{cases}(3+2\sqrt{2})^{n}=99+b\sqrt{2}\\(3-2\sqrt{2})^{n}=99-b\sqrt{2}\end{cases}\xrightarrow{\text{ضرب}}(9-8)^{n}=(99)^{2}-2b^{2}$$

$$\Rightarrow1=9801-2b^{2}\Rightarrow2b^{2}=9800\Rightarrow b^{2}=4900\Rightarrow b=70$$

۵- گزینه‌ی «۱»

$$(\sqrt{x}(1+\sqrt{x}))^{4}(\sqrt{x}+1)^{7}=x^{2}(\sqrt{x}+1)^{11}$$

جمله‌ی $(k+1)$ام بسط $x^{2}(\sqrt{x}+1)^{11}$ را می‌یابیم:

$$=x^{2}\left(\binom{11}{k}(\sqrt{x})^{11-k}\times1^{k}\right)=x^{2}\binom{11}{k}x^{\frac{11-k}{2}}$$

باید توان x در عبارت ۵ باشد، پس:

$$\frac{11-k}{2}+2=5\Rightarrow k=5$$

بنابراین ضریب x^5 برابر $\binom{11}{5}$ است.

۶- گزینه‌ی «۳»

جمله‌ی $(k+1)$ام را می‌نویسیم:

$$\text{ام}(k+1)\text{جمله‌ی}=\binom{16}{k}(2x^{\frac{1}{4}})^{16-k}.(x^{\frac{-2}{3}})^{k}$$

$$=\binom{16}{k}2^{16-k}.x^{\frac{16-k}{4}}.x^{\frac{-2k}{3}}$$

با توجه به توان‌های فوق باید اولاً $16-k$ مضرب ۴ باشد، ثانیاً k مضرب ۳ باشد، لذا:

$$1)\ \ k\in\{\underline{\underline{0}},4,8,\underline{\underline{12}},16\}$$

$$2)\ \ k\in\{\underline{\underline{0}},3,6,9,\underline{\underline{12}},15\}$$

بنابراین $k=0,12$ قابل قبول است و فقط ۲ جمله گویاست

۷- گزینه‌ی «۳»

با بازنویسی معادله‌ی $x(5x+3)=2$ خواهیم داشت:

$$5x^2+3x-2=0$$

در این معادله $a+c=b$، پس $\alpha=-1$ و $\beta=\frac{2}{5}$ خواهد بود، بنابراین ریشه‌های معادله‌ی جدید عبارتند از:

$$\frac{1}{\alpha^2}=1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{\beta^2}=\frac{25}{4}$$

ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، لذا:

$$4-k+25=0 \rightarrow k=29$$

۸- گزینه‌ی «۲»

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم. از آنجا که یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است، داریم:

$$\alpha=\frac{\beta}{2}+5 \quad (*)$$

از طرفی با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر ۸ است، یعنی:

از (*) و (**) داریم:

$$\begin{cases}\alpha=\frac{\beta}{2}+5\\ \alpha+\beta=8\end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{2}+5+\beta=8 \Rightarrow \frac{3\beta}{2}=3 \Rightarrow \beta=2$$

چون β ریشه‌ی معادله است، پس در آن صدق می‌کند، بنابراین:

$$\beta=2:(2)^2-8(2)+m=0 \Rightarrow m=12 \quad \alpha+\beta=8 \quad (**)$$

۹- گزینه‌ی «۴»

در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ مجموع ریشه‌ها برابر $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ است، چون ضرایب معادله گویاست پس $\frac{-b}{a}$ هم گویاست، از طرفی یک ریشه $-1+\sqrt{3}$ ، پس ریشه‌ی دیگری باید $-1-\sqrt{3}$ باشد (چرا؟) بنابراین:

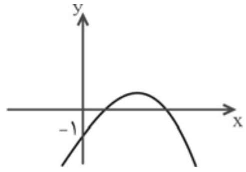
$$\alpha=-1+\sqrt{3} \quad \text{و} \quad \beta=-1-\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=(-2)^3-3(-2)(-2)=-20$$

۱۰- گزینه‌ی «۱»

ضریب x^2 باید منفی باشد زیرا در غیر این‌صورت نمودار تابع درجه‌ی دوم حتماً از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. بنابراین:

$$a-3<0 \Rightarrow a<3$$

حال با توجه به اینکه $a<3$ است، حالتی را در نظر می‌گیریم که نمودار حتماً از ناحیه‌ی اول بگذرد، سپس مجموعه‌ی جواب بدست آمده را از جواب $a<3$ کم می‌کنیم. چون عرض از مبدأ -1 است و $a<3$ است (ماکزیمم دارد) پس نمودار زیر برای عبور تابع از ناحیه‌ی اول قابل رسم است.



با توجه به نمودار، شرط‌های زیر برقرار خواهند بود:

دو ریشه دارد : $\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0$

$\Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+6) > 0$

$a > 2$ یا $a < -6$ I

ضرب ریشه‌ها مثبت : $\frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a < 3$ II

جمع ریشه‌ها مثبت : $\frac{-a}{a-3} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3$ III

از اشتراک شرط‌های I، II و III، مجموعه‌ی مقادیر a به‌صورت $2 < a < 3$ خواهد بود. یعنی اگر $2 < a < 3$ باشد نمودار حتماً از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. با کم کردن این جواب، از شرط $a < 3$ خواهیم داشت:

$a \le 2$

پس با شرط $a \le 2$ نمودار تابع از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد.

۱۱- گزینه‌ی «۳»

تابع دارای دو ریشه‌ی ۸ و ۲- است، بنابراین می‌توان معادله‌ی آن را به‌صورت زیر نوشت:

$f(x) = a(x+2)(x-8)$

از طرفی نقطه‌ی $(0,16) \in f$، پس:

$16 = a(0+2)(0-8) \rightarrow a = -1$

$\Rightarrow f(x) = -(x+2)(x-8)$

برای یافتن مجموع ضرایب کافی است $f(1)$ را بیابیم:

$f(1) = -(3)(-7) = 21$

۱۲- گزینه‌ی «۳»

$y = a(x^2 - 2x + 1) + 1 = a(x-1)^2 + 1$

نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم به مختصات $(1,1)$ است، چون عرض نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم ۱ است، پس خط $y = 1$ همواره بر نمودار مماس است.

۱۳- گزینه‌ی «۲»

توجه می‌کنیم که $x \neq 2$ و $x \neq -2$ زیرا ریشه‌های مخرج هستند:

با ضرب طرفین معادله در ک.م.م مخرج‌ها $((x-2)(x+2))$ داریم:

$(x-2)^2 + x(x+2) = 8$

$2x^2 - 2x + 4 = 8 \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$\rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 , x = 2$

$x = 2$ قابل قبول نیست، پس $x = -1$ و معادله فقط یک ریشه دارد.

۱۴- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{(3-x)(x-3)+(x+1)(x+3)}{x^2-9}=\frac{ax+b}{x^2-9}$$

$$\xrightarrow{x\neq\pm 3} -x^2+6x-9+x^2+4x+3=ax+b$$

$$\rightarrow 10x-6=ax+b$$

اگر $a=10$ و $b=-6$ باشد، تساوی به ازای هر x حقیقی به‌جز $x=3$ و $x=-3$ برقرار است و معادله بی‌شمار ریشه دارد، پس $a+b=4$.

۱۵- گزینه‌ی «۳»

چون $x\leq 0$ است، پس می‌توانیم بنویسیم $x=-(\sqrt{-x})^2$، حال معادله را برحسب $\sqrt{-x}$ می‌نویسیم:

$$-(\sqrt{-x})^2+3(\sqrt{-x})+18>0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{-x})^2-3(\sqrt{-x})-18<0$$

با تجزیه خواهیم داشت:

$$\Rightarrow (\sqrt{-x}-6)(\sqrt{-x}+3)<0$$

عبارت $\sqrt{-x}+3$ همواره مثبت است، پس:

$$\sqrt{-x}-6<0 \rightarrow \sqrt{-x}<6 \rightarrow -x<36 \rightarrow x>-36$$

$$\xrightarrow{x\leq 0} -36<x\leq 0$$

پس مجموعه جواب برابر $\{-35,-34,\dots,-1\}$ است که، ۳۵ عضو دارد.

۱۶- گزینه‌ی «۲»

با استفاده از نامساوی $|x|<a$ که معادل است با $-a<x<a$ خواهیم داشت:

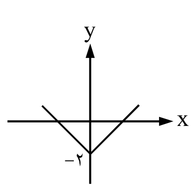
$$|x-1|<0.1 \Rightarrow -0.1<x-1<0.1 \Rightarrow 0.9<x<1.1$$

$$\Rightarrow 1.8<2x<2.2 \Rightarrow -1.2<2x-3<-0.8$$

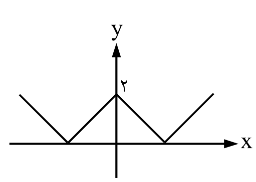
$$\Rightarrow \begin{cases} A=-1.2 \\ B=-0.8 \end{cases} \Rightarrow A+B=-2$$

۱۷- گزینه‌ی «۴»

ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را دو واحد به پایین منتقل کرده و سپس قسمت‌های پایین محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



$y=|x|-2$



$y=\big||x|-2\big|$

۱۸- گزینه‌ی «۴»

از تساوی $|x|+|y|=۲$ ؛ $x , y \in Z$، می‌توان نتیجه گرفت که مجموع دو عدد صحیح نـامنفی برابـر ۲ شـده اسـت و ایـن در صـورتی امکان‌پذیر است که یکی از حالات زیر رُخ دهد:

$|x|=۰ \ , \ |y|=۲ \ \rightarrow \ (۰ , ۲) , (۰ , -۲) \in R$

$|x|=۱ \ , \ |y|=۱ \rightarrow (۱ , ۱),(-۱ , -۱),(-۱ , ۱),(۱ , -۱) \in R$

$|x|=۲ \ , \ |y|=۰ \ \rightarrow \ (۲ , ۰) , (-۲ , ۰) \in R$

پس رابطه‌ی R دارای ۸ عضو است.

۱۹- گزینه‌ی «۴»

در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳)، دامنه‌ی جفت توابع با هم برابر نیست، فقط در گزینه‌ی (۴) دامنه‌ی هر دو تابع $R-\{۰\}$ و ضابطه‌هـا نیـز برابرند.

۲۰- گزینه‌ی «۳»

$$x^۳+y^۲-۲y=۰ \Rightarrow (y-۱)^۲-۱+x^۳=۰$$

$$\Rightarrow (y-۱)^۲=-x^۳+۱ \Rightarrow y-۱=\pm\sqrt{۱-x^۳}$$

$$\Rightarrow ۱-x^۳ \geq ۰ \Rightarrow x^۳ \leq ۱ \Rightarrow x \leq ۱$$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty , ۱]$$

۲۱- گزینه‌ی «۳»

$$f(x)=۲x+۳ \ , \ g(x)=x-۴$$

$$(۱) \ (fog)(۲)=f(g(۲))$$

$$g(۲)=۲-۴=-۲$$

$$f(g(۲))=f(-۲)=۲(-۲)+۳=-۴+۳=-۱$$

$$(۲) \ gof(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=۱-۴=-۳$$

$$\Rightarrow \frac{fog(۲)}{gof(-۱)}=\frac{-۱}{-۳}=\frac{۱}{۳}$$

۲۲- گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=x^۲-۱ \Rightarrow f(f(x))=f(x^۲-۱)=(x^۲-۱)^۲-۱=۰$$

$$\Rightarrow (x^۲-۱)^۲=۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲-۱=۱ \\ x^۲-۱=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} & \text{ریشه‌های ساده} \\ x^۲=۰ \Rightarrow x=۰ & \text{ریشه‌ی مضاعف} \end{cases}$$

ریشه‌های ساده محل تلاقی و ریشه‌ی مضاعف نقطه‌ی تماس می‌باشد

۲۳- گزینه‌ی «۳»

نقطه‌ی $(۴ , ۲) \in fog$ است، پس: $f(g(۴)) = ۲$

با توجه به زوج مرتب‌های f، $f(۳) = ۲$، پس $g(۴) = ۳$ لذا با توجه به زوج مرتب‌های g، $a = ۴$ است، از طرفی نقطه‌ی $(۴ , ۱) \in gof$ است، لذا:

$g(f(۴)) = ۱$

اما $f(۴) = ۵$، پس باید نقطه‌ی $(۵ , ۱)$ متعلق به تابع g باشد، لذا $b = ۵$ و از آنجا: $(a , b) = (۴ , ۵)$

۲۴- گزینه‌ی «۱»

تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد بنابراین $f(x) + f(-x) = ۰$، با انتخاب $x = ۱$ خواهیم داشت:

$f(۱) + f(-۱) = ۰$

اما:

$f(۱) = ۲\sqrt{۱} = ۲$ و $f(-۱) = -\sqrt{-a}$

پس:

$۲ - \sqrt{-a} = ۰ \to \sqrt{-a} = ۲ \to -a = ۴ \to a = -۴$

۲۵- گزینه‌ی «۱»

ابتدا دامنه‌ی تابع f را می‌یابیم،باید زیر رادیکال نامنفی باشد،یعنی:

$\sin \pi x - ۱ \ge ۰ \Rightarrow \sin \pi x \ge ۱$

اما $-۱ \le \sin u \le ۱$، لذا: $\sin \pi x = ۱ \Rightarrow \pi x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

بنابراین $x = ۲k + \frac{۱}{۲}$، از آنجایی که به ازای هر مقدار $k \in Z$، x عددی غیرصحیح است، پس:

$[x] + [-x] = -۱$ و $\sqrt{\sin \pi x - ۱} = ۰$

لذا در نقاطی که f تعریف می‌شود: $f(x) = -۱ + ۰ = -۱$

بنابراین $f(x)$ تابع ثابت -۱ است. لذا:

$$f\left(\frac{-۱}{۲} f(x)\right) = f\left(\frac{-۱}{۲}(-۱)\right) = f\left(\frac{۱}{۲}\right) = -۱$$

۲۶- گزینه‌ی «۱»

با استفاده از دستور $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$:

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \underbrace{\cos ۳x \cos ۲x + \sin ۳x \sin ۲x}_{\cos(۳x - ۲x)} \le ۱$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \cos x \le ۱$$

چون $\cos x$ مثبت است، کمان x در ناحیه‌ی اول یا چهارم بوده است، پس:

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۴}$$

۲۷- گزینه‌ی «۳»

$$\cot(25^\circ-\alpha)=\frac{1}{\tan(25^\circ-\alpha)}=\frac{1}{\tan(45^\circ-(\alpha+20^\circ))}$$

از آنجایی که $\tan(45^\circ-a)=\frac{1-\tan a}{1+\tan a}$، پس:

$$=\frac{1+\tan(\alpha+20^\circ)}{1-\tan(\alpha+20^\circ)}=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7$$

۲۸- گزینه‌ی «۳»

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5}\Rightarrow \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5-5\tan\alpha=1+\tan\alpha\Rightarrow 4=6\tan\alpha\Rightarrow \tan\alpha=\frac{2}{3}$$

اما:

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\Rightarrow \tan2\alpha=\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{4}{9}}=\frac{12}{5}=2/4$$

۲۹- گزینه‌ی «۴»

با استفاده از دستور تبدیل ضرب به جمع، و $1+\cos2u=2\cos^2u$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\cos20^\circ\cos40^\circ=\frac{1}{2}(\cos60^\circ+\cos20^\circ)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos20^\circ\\ \cos^2 80^\circ=\frac{1}{2}(1+\cos160^\circ)=\frac{1}{2}(1+\cos(180^\circ-20^\circ))\\ \qquad=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos20^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos20^\circ\cos40^\circ+\cos^2 80^\circ$$

$$=(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos20^\circ)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos20^\circ)=\frac{3}{4}$$

۳۰- گزینه‌ی «۴»

از آنجایی که $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$، پس $\sin110^\circ=\cos20^\circ$ پس:

$$\sin110^\circ(\tan20^\circ+\tan35^\circ)=\cos20^\circ\left(\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}+\frac{\sin35^\circ}{\cos35^\circ}\right)$$

$$=\frac{\cos20^\circ(\sin20^\circ\cos35^\circ+\cos20^\circ\sin35^\circ)}{\cos20^\circ\cos35^\circ}$$

$$=\frac{\sin(20^\circ+35^\circ)}{\cos35^\circ}=\frac{\sin55^\circ}{\cos35^\circ}=1$$

زیرا $\sin55^\circ=\cos35^\circ$.